Komplex-Konjugiertes

$$\overline{a+bi} = a-bi$$

$$\overline{7+3i} = 7-3i$$

$$\overline{8-5i} = 8+5i$$

$$\overline{6i} = \overline{0+6i} = 0-6i = -6i$$

$$\overline{7} = \overline{7+0i} = 7-0i = 7$$

$$\boxed{\begin{array}{l} z \in \mathbb{C} \\ z \in \mathbb{R} \Leftrightarrow z = \overline{z} \end{array}}$$

$$\boxed{\begin{array}{l} \forall z_1, z_2 \in \mathbb{C}: \\ \overline{z_1 \cdot z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2} \end{array}}$$

$$\boxed{\begin{array}{l} z \in \mathbb{C} \\ \overline{\overline{z}} = z \end{array}}$$

$$\boxed{\begin{array}{l} \forall \varphi \in \mathbb{R} \\ \overline{e^{i\varphi}} = e^{-i\varphi} \end{array}}$$

1.4 Fourier-Analyse [5]

Gegeben sei ein reellwertiges System
riertransformierten $H(f)$, die für eine
nimmt:

$H(f_1)$

- Geben Sie den Wert von $H(-f$

$H($

$$e^{-i\varphi} = \overline{e^{i\varphi}}$$

$$\mathcal{F}[g(t)](f) = \int_{-\infty}^{\infty} g(t)\cdot e^{2\pi\cdot f\cdot t\cdot j}\, dt$$

1.4 Fourier-Analyse [5]

Gegeben sei ein reellwertiges System mit der Impulsantwort $h(t)$ und der Fouriertransformierten $H(f)$, die für eine bestimmte Frequenz f_1 folgenden Wert annimmt:

$$H(f_1) = \sqrt{2} - j\sqrt{3}$$

- Geben Sie den Wert von $H(-f_1)$ an.

$= -6i$

$= 7$

$$H(-f_1) = \mathcal{F}[h(t)](-f_1) = \int_{-\infty}^{\infty} \underbrace{h(t)}_{\in\mathbb{R}} \cdot e^{2\pi\cdot(-f_1)\cdot t\cdot j}\, dt =$$

$$\boxed{h(t)\in\mathbb{R} \Rightarrow h(t) = \overline{h(t)}}$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \overline{h(t)} \cdot \overline{e^{2\pi\cdot f_1\cdot t\cdot j}}\, dt =$$

$$\overline{z_1\cdot z_2} = \overline{z_1}\cdot\overline{z_2}$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \overline{h(t)\cdot e^{2\pi f_1\cdot t\cdot j}}\, dt$$

$$= \overline{\int_{-\infty}^{\infty} h(t)\cdot e^{2\pi f_1\cdot t\cdot j}\, dt}$$

$$= \overline{\mathcal{F}[h(t)](f_1)} = \overline{H(f_1)} = \overline{\sqrt{2} - j\sqrt{3}} = \underline{\sqrt{2} + j\cdot\sqrt{3}}$$

$$\boxed{z\in\mathbb{C} \quad \overline{\overline{z}} = z}$$

Reellwertiges Signal $h(t)$

$$H(f_5) = 3 + 2j$$

$$\Rightarrow \quad H(-f_5) = 3 - 2j$$

$$\boxed{\overline{e^{i\varphi}} = e^{-i\varphi}}$$

$\mathcal{F}[h(t)](f_1) = H(f_1)$

3 Quantisierung [10]

Gegeben sei ein abgetastetes Signal $x[n]$ mit einem Wertebereich von -3 bis 3, das für die Weiterverarbeitung linear und symmetrisch um die 0 quantisiert werden soll. Für die Quantisierung ist entscheidend, dass exakt 8 Quantisierungsintervalle/Quantisierungsstufen angenommen und genutzt werden.

1. Welche Art der Quantisierung bietet sich hierfür an? [1]

   Mid-Riser, da gerade Anzahl an Quantisierungsstufen

2. Mit wie viel Bit kann das obige System codiert werden? [1]

   3 Bit $\Leftrightarrow$ 8 Stufen

3. Wie groß sind die Quantisierungsintervalle in der obigen Konfiguration? [2]

   $\Delta x = 0{,}75 = \frac{6}{8} = \frac{3}{4}$

4. Wie groß ist der Quantisierungsfehler bei der Quantisierung des Amplitudenwert $x[n] = 1.8$? [2]

   $e[n] = \hat{x}[n] - x[n] = 1{,}875 - 1{,}8 = 0{,}075$

- Zu quantisierender, symmetrischer Wertebereich geht von $-A_{max}$ bis A_{max}
- Breite des Quantisierungsintervall bei symmetrischer, linearer Quantisierung (Mid-Riser):

$$\Delta x = \frac{A_{\max} - (-A_{\max})}{2^{N_{bit}}} = \frac{A_{\max}}{2^{N_{bit}-1}}$$

$$\Delta x = \frac{3-(-3)}{2^3} = \frac{6}{8} = \frac{3}{4} = 0{,}75$$

- Für das vorherige Beispiel (N = 3 Bit)

$$\Delta x = \frac{A_{\max}}{4}$$

$$8 = 2^{N_{bit}} \Rightarrow$$

$$N_{bit} = \log_2(8) = 3$$

Quantisierungsfehler:

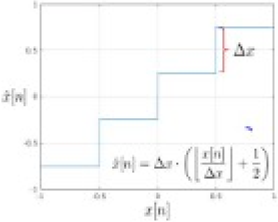
$$e[n] = \hat{x}[n] - x[n]$$

Bei linear Quantisierung:

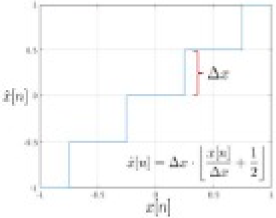
$$-\frac{\Delta x}{2} \leq e[n] \leq \frac{\Delta x}{2}$$

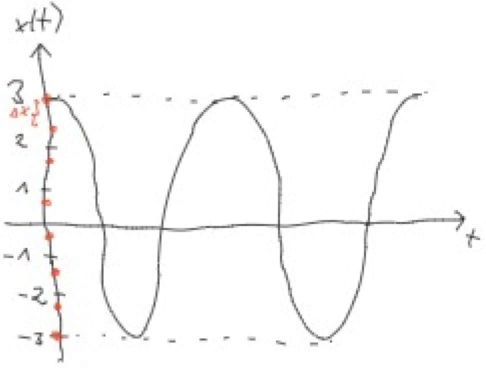
Lineare Quantisierung

Mid-riser



Mid-tread



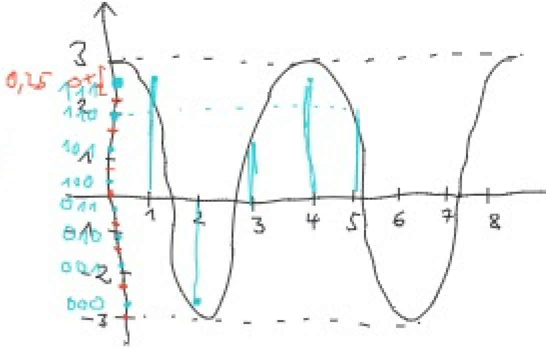


$\Delta x = \frac{6}{7}$

$$-\frac{\Delta x}{2} \le e[n] \le \frac{\Delta x}{2}$$

n Bit	Anzahl Zahlen, die man mit n-Bit codieren kann
1	$\lvert\{1,0\}\rvert = 2 = 2^1$
2	$\lvert\{00, 01, 10, 11\}\rvert = 4 = 2^2$
3	$\lvert\{000, 001, 010, 011, 100, 101, 110, 111\}\rvert = 8 = 2^3$

Mid-Riser



$$\Delta x = \frac{6}{8} = \frac{3}{4} = 0{,}75$$

$\lfloor x \rfloor$ = größte ganze Zahl, die kleiner oder gleich x ist

$\lfloor 5{,}3 \rfloor = 5$

$\lfloor 7{,}999 \rfloor = 7$

$\lfloor 6 \rfloor = 6$

$\lfloor -4{,}3 \rfloor = -5$

$$\hat{x}[n] = \Delta x \cdot \left\langle \left\lfloor \frac{x[n]}{\Delta x} \right\rfloor + \frac{1}{2} \right\rangle =$$

$$= 0{,}75 \cdot \left\langle \left\lfloor \frac{1{,}8}{0{,}75} \right\rfloor + \frac{1}{2} \right\rangle$$

$$= 0{,}75 \cdot \left\langle \lfloor 2{,}4 \rfloor + \frac{1}{2} \right\rangle = 0{,}75 \cdot \left\langle 2 + \frac{1}{2} \right\rangle = 1{,}875$$

$$=$$

$$\hat{x}[n] = 3 - 0{,}75 - \frac{0{,}75}{2}$$

$$= 1{,}875$$

5. Welches ist der größt...
nommen werden kan...

$3 - 0{,}...$

6. Welcher Signal-Rausch...
begründe Quantisierun...

$SNR = ...$

$= ...$

$SNR = ...$

$\approx ...$

5. Welches ist der größte Amplitudenwert, der durch die Quantisierung angenommen werden kann? [2]

$$3 - \frac{0,75}{2} = 2,625 = \hat{x}_{max}$$

6. Welcher Signal-Rauschabstand (in dB) wird (näherungsweise) durch die vorliegende Quantisierung erreicht? [2]

$$SNR = 3 \cdot 6,02\,dB =$$
$$= 18,06\,dB$$
$$SNR = 10 \cdot \log_{10}\left(2^{2\cdot 3}\right) =$$
$$\approx \underline{\underline{18,06\,dB}}$$

Signal-Rausch-Verhältnis (SNR)
Lineare Quantisierung

Nimmt man alles zusammen, was wir bisher wissen:

$$\mathrm{SNR}_{\mathrm{dB}} = 10 \cdot \log_{10}\left(2^{2\cdot N_{\mathrm{bit}}}\right)$$

$$\mathrm{SNR} \approx N_{\mathrm{bit}} \cdot 6.02\ \mathrm{dB}$$

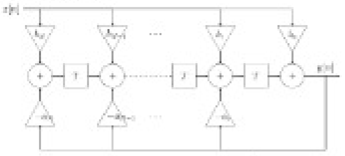
6 Filter Analyse [30]

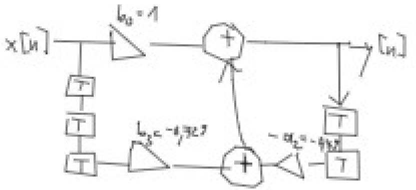
Gegeben seien die nachfolgenden Filterkoeffizienten:

Tabelle 1: Filterkoeffizienten

i	0	1	2	3
b_i	1	0	0	−0.729
a_i		0	0.49	0

Die Koeffizienten des Filters beziehen sich auf die nachstehende allgemeine Darstellung eines IIR Filters.





a) Geben Sie die Differenzengleichung dieses Filters an. [3]

$y[n] =$

$$y[n] = b_0 \cdot x[n] + b_3 \cdot x[n-3] - a_2 \cdot y[n-2] \quad | \; Z$$

b) Welche Ordnung besitzt das durch die angegebenen Koeffizienten definierte Filter? [1]

Ordnung = höchste Zeitverschiebung, die vorkommt = 3

c) Geben Sie die z-Übertragungsfunktion des Filters an. [4]

Eigenschaften wie Linearität, Verschiebung, Faltung, Differentiation [Bearbeiten | Quelltext bearbeiten]

- **Linearität**: Die z-Transformierte von zwei linear verknüpften Signalen ist die lineare Verknüpfung der beiden z-transformierten Signale.
  $Z\{a_1 x_1[k] + a_2 x_2[k]\} = a_1 Z\{x_1[k]\} + a_2 Z\{x_2[k]\}$
- **Verschiebung**: Wird das Signal im Zeitbereich um n nach rechts verschoben, so muss die z-Transformierte mit z^{-n} multipliziert werden. Bei der Verschiebung nach links kommen noch weitere Terme hinzu.
  $Z\{x[k-n]\} = z^{-n} Z\{x[k]\}$
  $Z\{x[k+n]\} = z^{n}\left(Z\{x[k]\} - \sum_{k=0}^{n-1} x[k] z^{-k}\right)$

$$Z[y] = b_0 \cdot Z[x] + b_3 \cdot z^{-3} \cdot Z[x] - a_2 \cdot z^{-2} \cdot Z[y]$$

$$Z[x[n-3]] = z^{-3} \cdot Z[x]$$

$$Z[y] \cdot \left(1 + \frac{a_2}{z^2}\right) = Z[x] \cdot \left(b_0 + \frac{b_3}{z^3}\right) \quad | : Z(x) \; |$$

z ~ Übertragungsfunktion

$$G(z) = \frac{Z[y]}{Z[x]} = \frac{b_0 + \frac{b_3}{z^3}}{1 + \frac{a_2}{z^2}} = \frac{1 - \frac{0{,}729}{z^3}}{1 + \frac{0{,}49}{z^2}}$$